Généralités sur les fonctions

(En seconde)

Dernière mise à jour : Dimanche 31 Octobre 2010

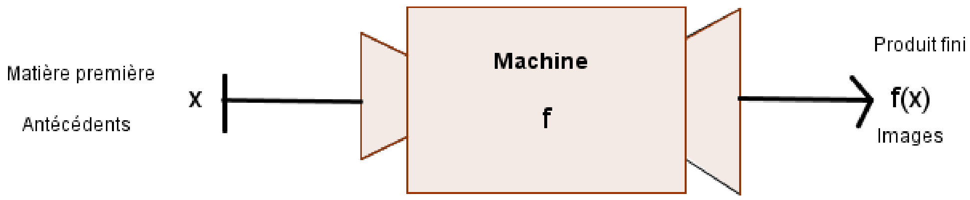
Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2010-2011)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Définition et Notations



Nous n'allons pas utiliser cette représentation à chaque fois que l'on travaille sur une fonction et donc nous allons utiliser une nouvelle notation qui veut dire la même chose mais en plus simple :
Notation mathématique d'une fonction :

$$f : x \longmapsto f(x)$$

On lit : f la fonction qui à x associe son image $f(x)$

Attention au vocabulaire :
f est la fonction, x est l'antécédent et $f(x)$ l'image de x par la fonction f.
Ne pas confondre f et $f(x)$. **Exemples :**

1. $f_1 : x \longmapsto 3x$ (Fonction linéaire)
2. $f_2 : x \longmapsto 5x + 4$ (Fonction affine)
3. $f_3 : x \longmapsto 6$ (Fonction constante)
4. $f_4 : x \longmapsto x^2$ (Fonction "carré")
5. $f_5 : x \longmapsto \sqrt{x}$ (Focntion racine carrée)
6. $f_6 : x \longmapsto \dfrac{5x+3}{7x-1}$ (Fonction homographique)
7. $f_7 : x \longmapsto 4(x-1)^2 - 25$ (Fonction polynôme du second degré sous forme canonique)
8. $f_8 : x \longmapsto 4x^2 - 5x + 6$ (Fonction polynôme du second degré sous forme développée)
9. $f_9 : x \longmapsto 2(x-2)(x+3)$ (Fonction polynôme du second degré sous forme factorisée)

2 Ensemble de définition d'une fonction

Définition :

L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble D_f des valeurs de x (antécédents) pour lesquelles $f(x)$ (image) existe.

Il n'y a que deux ou trois cas, en seconde, pour lesquels il se peut que la fonction admette des valeurs interdites. Les fonctions sous forme rationnelle avec x au dénominateur et les fonctions sous forme de racines carrées avec x sous le radical.
Exemples :

1. $f_1 : x \longmapsto 3x^2 - 5$
   $f_1(x)$ existe pour toutes les valeurs réelles de x donc $\boxed{D_{f_1} = \mathbb{R}}$
   On peut aussi écrire : $\boxed{D_{f_1} =]-\infty; +\infty[}$
2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
   $f_2(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$ donc $\boxed{D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$
   On peut aussi écrire : $\boxed{D_{f_2} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[}$ ou $\boxed{D_{f_2} = \mathbb{R}^*}$
3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{3x-1}{2x-4}$
   $f_3(x)$ existe si et seulement si $2x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 4 \Leftrightarrow x \neq 2$
   Donc $\boxed{D_{f_3} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[}$ ou $\boxed{D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$
4. $f_4 : x \longmapsto \dfrac{5x+1}{x^2-9}$
   $f_4(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x - 3 \neq 0$ et $x + 3 \neq 0$
   $\Leftrightarrow x \neq 3$ et $x \neq -3$
   Donc $\boxed{D_{f_4} =]-\infty; -3[\cup]-3; 3[\cup]3; +\infty[}$ ou $\boxed{D_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}}$
5. $f_5 : x \longmapsto \sqrt{3x-6}$
   $f_5(x)$ existe si et seulement si $3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2$
   donc $\boxed{D_{f_5} = [2; +\infty[}$
6. $f_6 : x \longmapsto \sqrt{15-5x}$
   $f_6(x)$ existe si et seulement si $15 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow -5x \geq -15 \Leftrightarrow x \leq 3$
   donc $\boxed{D_{f_3} =]-\infty; 3]}$

3 Représentation d'une fonction

Nous allons voir trois façon de représenter une fonction, la représentation sous forme algébrique que nous avons vu dans le paragraphe précédent, la représentation sous forem graphique et la représentation sous forme d'algorithme. Vous devez savoir manipuler les trois forme et passer de l'une à l'autre.

3.1 Représentation algébrique

La représentation algébrique d'une fonction est l'expression de $f(x)$ en fonction de x. Voir les exemples du premier paragraphe.

A l'aide de la représentation algébrique, on peut par exemple dresser un tableau de valeurs de la fonction f .

Exemple :

$f : x \longmapsto 3x^2 - 5$

Tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$1,5$
$f(x)$	7	-2	-5	-2	1	$1,75$

3.2 Représentation graphique d'une fonction

Lorsqu'on a la représentation algébrique ou algorithmique on peut dresser un tableau de valeurs de la fonction f puis ensuite définir des points de la forme $(x; f(x))$ que l'on peut placer dans un repère (O, OI, OJ) ou OI et OJ sont les unités des axes du repère.

Notation :

On notera C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère.

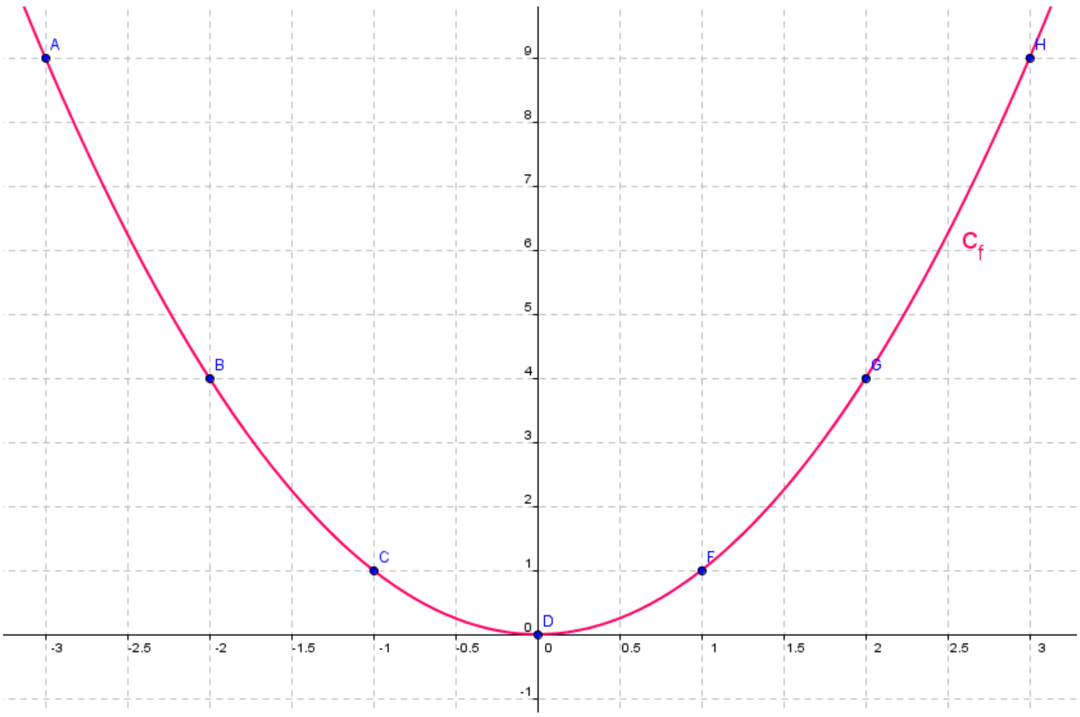
Attention : Il ne faut pas non plus confondre f, C_f et $f(x)$. Ce sont trois choses différentes.

Exemple :

$f : x \longmapsto x^2$

Tableau de valeurs :

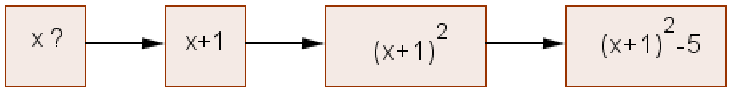
x	-3	-2	-1	0	1	2	
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9
$(x, f(x))$	$A(-3;9)$	$B(-2;4)$	$C(1;1)$	$D(0;0)$	$E(1;1)$	$F(2;4)$	$G(3;9)$



3.3 Représentation algorithmique d'une fonction

Un algorithme est une suite d'instructions rigoureuses, ordonnant à un processeur (vous ou l'ordinateur) d'exécuter dans un ordre un nombre fini d'opérations élémentaires.
On va des fois confondre algorithme et programme. Le programme est l'écriture de l'algorithme dans un langage précis pour qu'un ordinateur puisse l'exécuter. Nous utiliserons principalement cette année le logiciel Algobox ou la calculatrice pour écrire le programme de nos algorithme. Exemple 01 :
On veut traduire la fonction suivante $f : x \longmapsto (x+1)^2 - 5$
Voici trois façon d'écrire l'algorithme mais la dernière sera plus proche du programme.

1. Comme au collège :
   Prendre un nombre.
   Lui ajouter 1.
   Elever le résultat au carré.
   Retrancher 5 au résultat.
   Ecrire le nombre obtenu.
2. En schématisant :

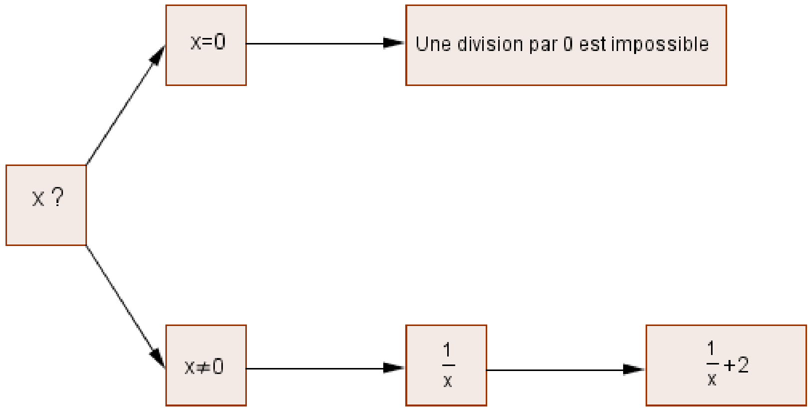


3. En utilisant un programme :
   Déclaration des variables :
   x est un réel
   y est un réel
   Début du programme
   y prend la valeur de $x+1$
   y prend la valeur de y^2
   y prend la valeur de $y+1$
   Afficher la valeur de y
   Fin du programme.

Exemple 02 :
On veut traduire la fonction suivante $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} + 2$
Voici trois façon d'écrire l'algorithme mais la dernière sera plus proche du programme.

1. Comme au collège :
   Prendre un nombre.
   Si celui-ci est égal à 0 afficher que c'est impossible de diviser par 0
   Sinon
   Prendre l'inverse du nombre
   Ajouter 2 au résultat précédent.
   Afficher le résultat obtenu.

2. En schématisant :



3. En utilisant un programme :
Déclaration des variables :
x est un réel
y est un réel
Début du programme
Si $x = 0$ alors afficher : Une division par 0 est impossible
Sinon
y prend la valeur de $\dfrac{1}{x}$
y prend la valeur de $y + 2$
Afficher la valeur de y
Fin du programme.

4 Recherche de l'image d'un nombre par une fonction

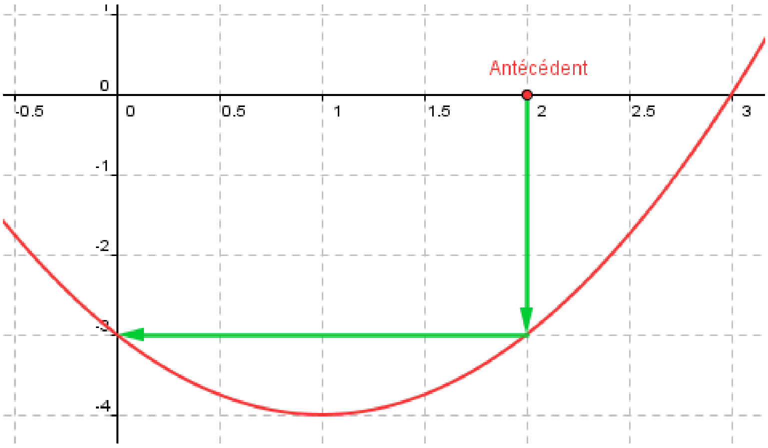
4.1 Algébriquement

Exemple :
On note f la fonction $f : x \longmapsto (x-1)^2 - 4$
Cherchons l'image de 2 par la fonction f :
Dans ce cas on connaît l'antécédent $x = 2$ donc il suffit de remplacer x par 2 dans l'expression algébrique pour calculer son image $f(2)$.
$f(2) = (2-1)^2 - 4 = (1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$
Donc -3 est l'image de 2 par la fonction f.

4.2 Graphiquement

Exemple :

On note f la fonction $f : x \longmapsto (x-1)^2 - 4$
Cherchons graphiquement l'image de 2 par la fonction f :



Donc -3 est l'image de 2 par la fonction f.
Remarque : On peut lire qu'uen approximation lorsque l'on fait une lecture graphique.

4.3 A l'aide de l'algorithme

Exemple :
On note f la fonction $f : x \longmapsto (x-1)^2 - 4$
Cherchons à l'aide d'un programme l'image de 2 par la fonction f :
Programme de la fonction :
Déclaration des variables :
x est un réel
y est un réel
Début du programme
y prend la valeur de $x - 1$
y prend la valeur de y^2
y prend la valeur de $y - 4$
Afficher la valeur de y
Fin du programme.
Exécutons ce programme en remplaçant x par 2 :
x prend la valeur de 2
y prend la valeur de $2 - 1 = 1$
y prend la valeur de $1^2 = 1$
y prend la valeur de $1 - 4 = -3$
L'affichage est -3
Donc l'image de 2 par f est -3

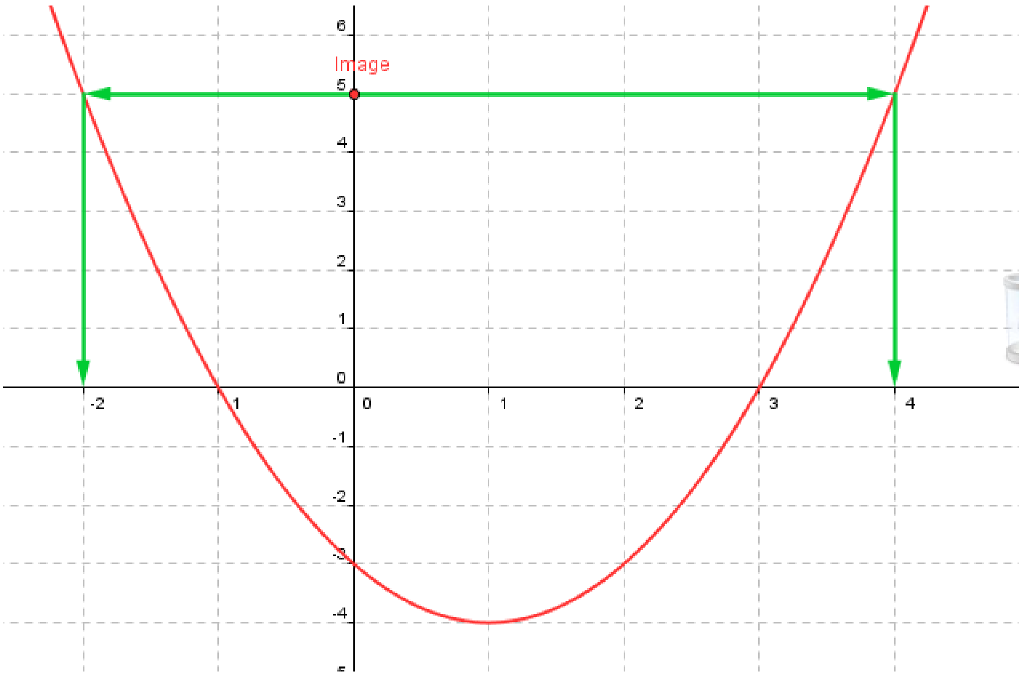
5 Recherche des antécédents d'un nombre par une fonction

5.1 Algébriquement

Exemple :
On note f la fonction $f : x \longmapsto (x-1)^2 - 4$
Cherchons les antécédents de 5 par la fonction f :
Dans ce cas on connaît l'image $f(x) = 5$ donc il suffit de résoudre cette équation pour déterminer les éventuelles antécédents de 5 par f.
$f(x) = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1+3)(x-1-3) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) = 0$
$\Leftrightarrow x+2 = 0$ ou $x-4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 4$
Donc les antécédents de 5 par f sont -2 et 4.

5.2 Graphiquement

On note f la fonction $f : x \longmapsto (x-1)^2 - 4$
Cherchons graphiquement les antécédents de 5 par la fonction f :



Donc -2 et 4 sont les antécédents de 5 par la fonction f.

5.3 A l'aide de l'algorithme

On note f la fonction $f : x \longmapsto (x-1)^2 - 4$

Cherchons à l'aide d'un programme les antécédents de 5 par la fonction f :
Programme de la fonction :
Déclaration des variables :
x est un réel
y est un réel
Début du programme
y prend la valeur de $x-1$
y prend la valeur de y^2
y prend la valeur de $y-4$
Afficher la valeur de y
Fin du programme.
Exécutons ce programme mais à l'envers. Faire les opérations inverses du bas vers le haut.
L'affichage est 5
y a donc pris la valeur de 5
y a pris la valeur de $5+4=9$
y a pris la valeur de $\sqrt{9}=3$ ou $-\sqrt{9}=-3$
y a pris la valeur $3+1=4$ ou la valeur $-3+1=-2$
x a pris la valeur -2 ou 4
Donc les antécédents de 5 par f sont -4 et 2

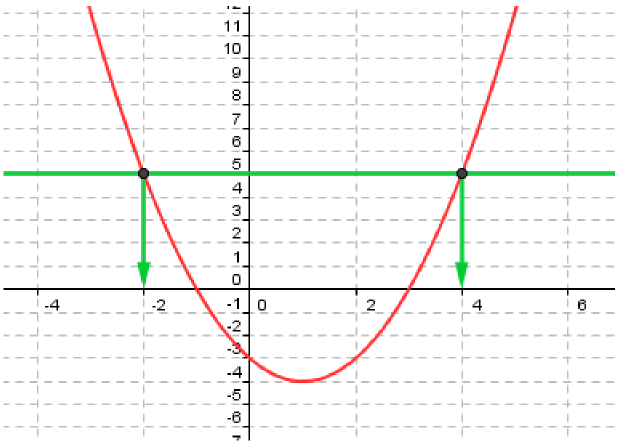
6 Résolution d'inéquations

6.1 Algébriquement

Cette partie sera abordées dans le futur chapitre sur les inéquations donc pour l'instant il n'y aura que des résolutions graphique d'inéquations.

6.2 Graphiquement

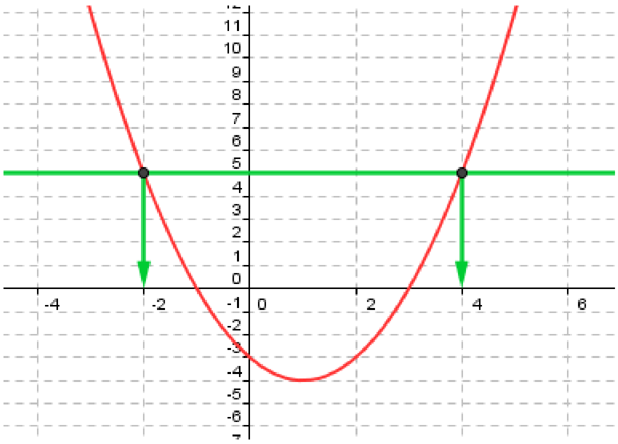
On note f la fonction $f : x \longmapsto (x-1)^2-4$
On cherche à résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 5$
Il faut donc trouver les abscisses x des points de la courbe représentative de f qui ont une ordonnée plus petites ou égale à 5.



Les solutions de cette inéquations sont donc $S = [-4; 2]$

On cherche à résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 5$

Il faut donc trouver les abscisses x des points de la courbe représentative de f qui ont une ordonnée plus grandes strictement à 5.



Les solutions de cette inéquations sont donc $S =]-\infty; -4[\cup]2; +\infty[$

7 Recherche des extrémas d'une fonction

7.1 Algébriquement

Définition du minimum de f sur un intervalle I :

Min est le minimum de f sur un intervalle I si et seulement si :
$\triangleright$ Il existe a dans I tel que $f(a) = Min$
$\triangleright$ Pour tout $x \in I$, $f(x) \geq Min$

Définition du maximum de f sur un intervalle I :

Max est le maximum de f sur un intervalle I si et seulement si :
▷ Il existe a dans I tel que $f(a) = Max$
▷ Pour tout $x \in I$, $f(x) \leq Max$

Le principe est de comparer $f(x)$ et Min ou Max en étudiant le signe de leur différence.

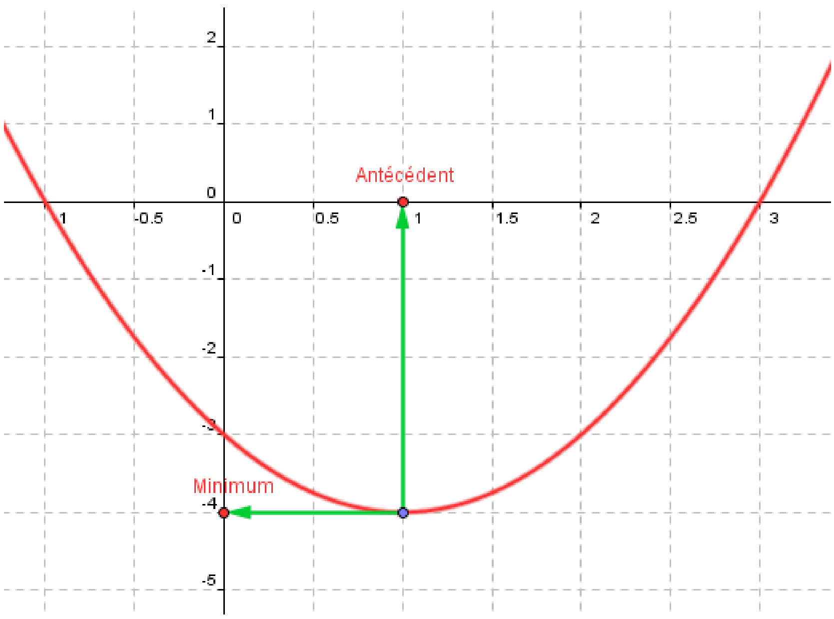
Exemple 01 :
On note $f : x \longmapsto 3(x-1)^2 + 5$
On souhaite montrer que 5 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$
▷ $f(1) = 3(1-1)^2 + 5 = 5$ donc $f(1) = 5$
▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 5 = 3(x-1)^2$ donc $f(x) - 5 \geq 0$ donc $f(x) \geq 5$
Les deux conditions sont vérifiées donc 5 est la minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exemple 02 :
On note $f : x \longmapsto 5 - 3(x-1)^2$
On souhaite montrer que 5 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$
▷ $f(1) = 5 - 3(1-1)^2 = 5$ donc $f(1) = 5$
▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 5 = -3(x-1)^2$ donc $f(x) - 5 \leq 0$ donc $f(x) \leq 5$
Les deux conditions sont vérifiées donc 5 est la maximum de f sur $\mathbb{R}$.

7.2 Graphiquement

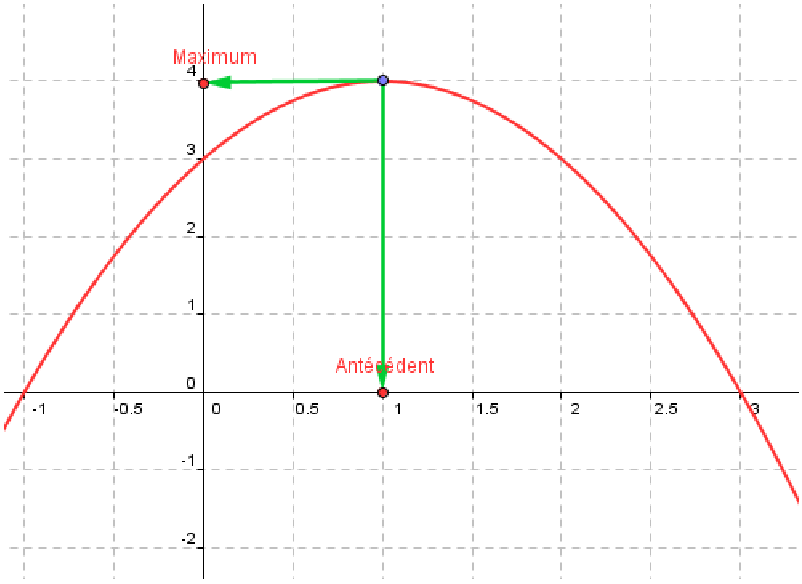
Graphiquement, le minimum de la fonction f sur I est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe qui se trouve dans l'intervalle I.
Graphiquement, le maximum de la fonction f sur I est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe qui se trouve dans l'intervalle I.

Exemple 01 :



-4 est le minimum de f sur l'intervalle $[-1;3]$ et est atteint pour $x = 1$

Exemple 02 :



4 est le maximum de f sur l'intervalle $[-1;3]$ et est atteint pour $x = 1$

8 Le tableau de signe d'une fonction

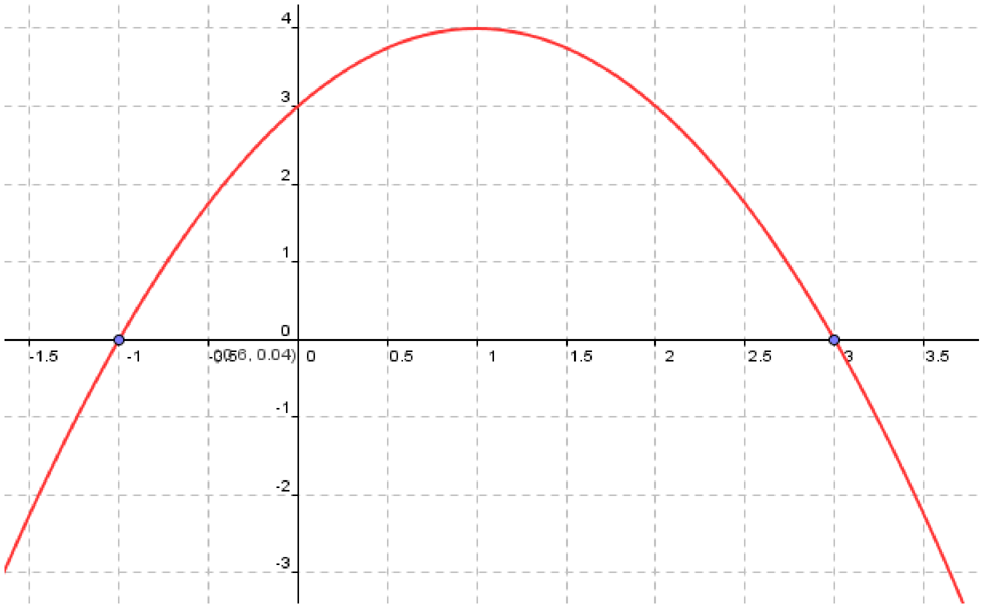
Le tableau de signe d'une fonction traduit le signe de celle-ci sur l'ensemble de définition. Nous verrons dans ce paragraphe la méthode pour dresser un tableau de signe à l'aide de la représentation graphique d'une fonction.

Remarques :

$f(x) > 0$ est équivalent à $(x; f(x))$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

$f(x) < 0$ est équivalent à $(x; f(x))$ est en-dessous de l'axe des abscisses.

Exemple :



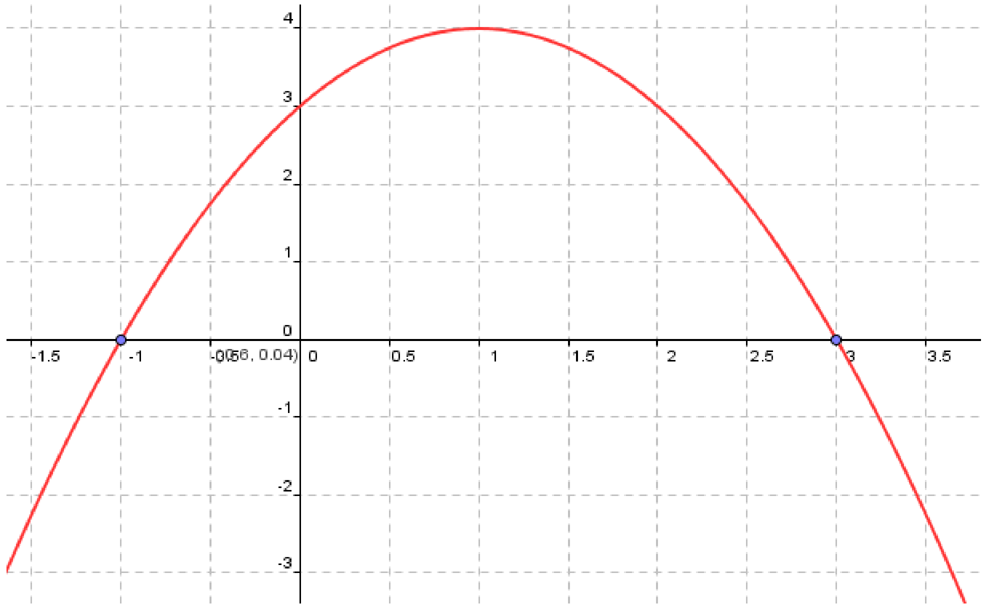
On peut donc dresser le tableau des signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dans la première ligne du tableau, il faut mettre les valeurs des x pour lesquelles $f(x) = 0$ ou les abscisses dans points de la courbe qui sont sur l'axe des abscisses.

9 Le tableau des variations d'une fonctions

Le tableau des variations d'une fonction traduit les variations de celle-ci sur l'ensemble de définition. Nous verrons dans ce paragraphe la méthode pour dresser un tableau des variations à l'aide de la représentation graphique d'une fonction.
Remarques :
Le tableau des variations donne l'allure de la courbe.
Exemple :



On peut donc dresser le tableau des variations ci-dessous :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	

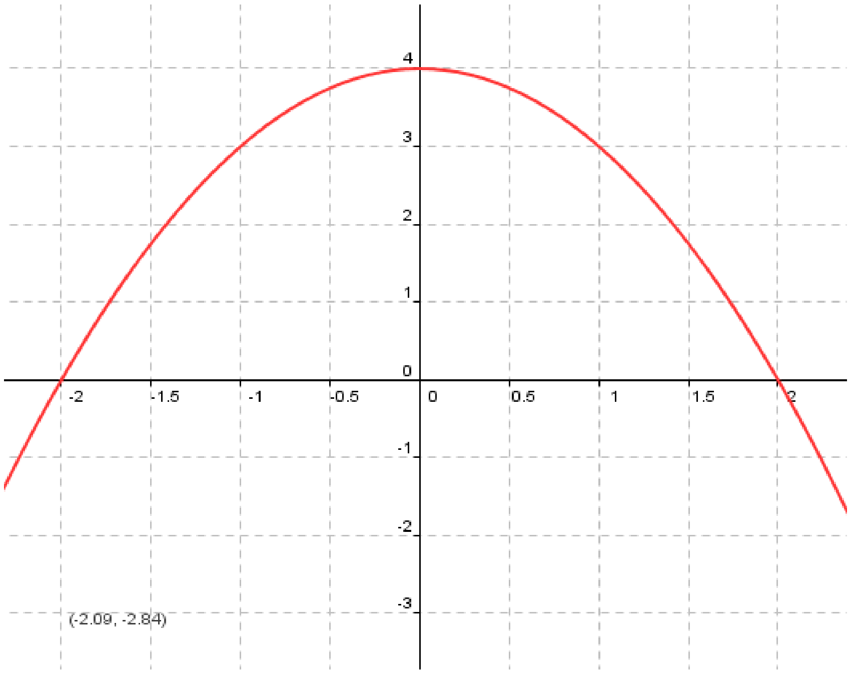
On dira donc :
▷ La fonction f est croissante sur $]-\infty;1]$
▷ La fonction f est décroissante sur $[1;+\infty[$
Attention : On ne parle pas de croissance ou décroissance lorsque l'on parle de la courbe mais seulement de la fonction.
Dans la première ligne du tableau, il faut mettre les valeurs des x pour lesquelles il y a un changement de variations.

10 Quelques cas particuliers

10.1 Les fonctions paires

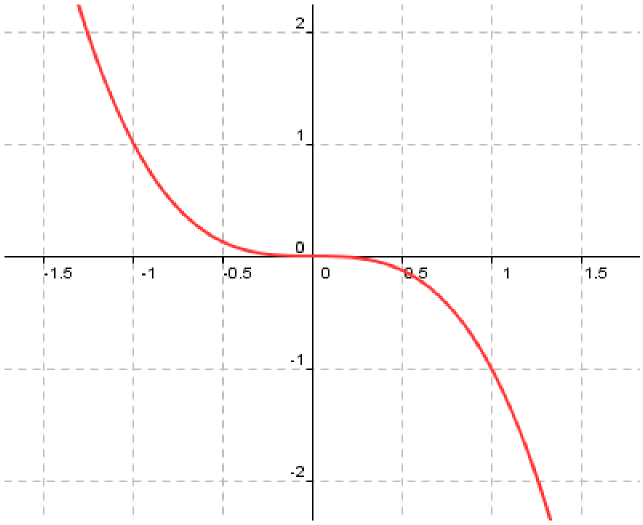
Définition :
On note f une fonction et D_f son domaine de définition.
On dit que f est paire si et seulement si, les deux conditions ci-dessous sont vérifiées :
▷ Si $x \in \mathbb{D}_f$ alors $-x \in D_f$ (tout nombre de D_f a son opposé dans D_f)
▷ Pour tout $x \in D_f$ alors $f(-x) = f(x)$ (un nombre et son opposé ont la même image)
Graphiquement cela se traduit par le fait que : $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple :
On note $f : x \longmapsto -x^2 + 4$
L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$
$\triangleright$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$
$\triangleright$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $f(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = f(x)$
Donc les deux conditions sont vérifiées donc f est une fonction paire et $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



10.2 Les fonctions impaires

Définition :
On note f une fonction et D_f son domaine de définition.
On dit que f est impaire si et seulement si, les deux conditions ci-dessous sont vérifiées :
$\triangleright$ Si $x \in \mathbb{D}_f$ alors $-x \in D_f$ (tout nombre de D_f a son opposé dans D_f)
$\triangleright$ Pour tout $x \in D_f$ alors $f(-x) = -f(x)$ (un nombre et son opposé ont des images opposées)
Graphiquement cela se traduit par le fait que : $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
Exemple :
On note $f : x \longmapsto -x^3$
L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$
$\triangleright$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$
$\triangleright$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $f(-x) = -(-x)^3 = -(-x^3) = x^3 = -f(x)$
Donc les deux conditions sont vérifiées donc f est une fonction impaire et $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.



10.3 Les fonctions périodiques

Définition :
On dit que f est périodique de période T ou T_périodique si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont vérifiées :
▷ Si $x \in \mathbb{D}_f$ alors $x + T \in D_f$
▷ Pour tout $x \in D_f$ alors $f(x + T) = f(x)$
Graphiquement cela se traduit par le fait qu'une partie de la courbe se répète de façon périodique par translation à droite ou à gauche.
Exemple graphique :