Niveau :
Terminale ES Spé Maths

Titre Cours :
Matrices, Matrices carrées et Evolution de processus

Année :
2017-2018

(Cayley Hamilton)

«Pour inventer, il faut penser à côté. » (Paul Souriau)

I. Définition

1. Définition

On note p et q deux entiers naturels non nuls

Une matrice est un tableau de p lignes et q colonnes dont les coefficients sont des réels (voir des complexes dans les années futures)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,p\} \\ j\in\{1,\ldots,q\}}}$$

Le coefficient a_{ij} est à l'intersection entre la ligne i et la colonne j

Une matrice carrée est une matrice qui a le même nombre de ligne et le même nombre de colonne. On notera dans ce cas n le nombre de lignes et de colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\} \\ j\in\{1,\ldots,n\}}}$$

Une matrice ligne est une matrice comportant une seule ligne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Une matrice colonne est une matrice comportant une seule colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

2. Exemples

II. Opérations sur les matrices

1. Somme de matrices de mêmes dimensions

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots\ldots & a_{pq} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots\ldots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots\ldots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots\ldots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

On note C la matrice définie par C= A+B

Alors pour tout i dans $\{1,..p\}$ et j dans $\{1,..q\}$ on a $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots\ldots & a_{1q}+b_{1q} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots\ldots & a_{2q}+b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}+a_{p1} & a_{p2}+b_{p2} & \ldots\ldots & a_{pq}+b_{pq} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors } A+B = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

2. Multiplication d'une matrice par un réel

On note λ un réel.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

On note $C=\lambda A$ la matrice $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1q} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{p1} & \lambda a_{p2} & \cdots & \lambda a_{pq} \end{pmatrix}$

Alors pour tout i dans $\{1,..p\}$ et j dans $\{1,..q\}$ on a $c_{ij}=\lambda a_{ij}$

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ alors } -2A=\begin{pmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

3. Différences de deux matrices de mêmes dimensions

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

On note C la matrice définie par C= A-B

Alors pour tout i dans $\{1,..p\}$ et j dans $\{1,..q\}$ on a $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1q} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}-a_{p1} & a_{p2}-b_{p2} & \cdots & a_{pq}-b_{pq} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors } A-B=\begin{pmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

4. Multiplication d'une matrice ligne par une matrice $p\times q$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots\ldots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots\ldots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots\ldots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

On note C la matrice définie par C= A×B

Alors pour tout j dans $\{1,..,q\}$ on a $c_{1j}=\sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kj}$

$$C=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kq} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A\times B=\begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$

5. Multiplication d'une matrice $p\times q$ par une matrice colonne

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots\ldots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots\ldots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots\ldots & b_{pq} \end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{q1} \end{pmatrix}$$

On note C la matrice définie par C= B×A

Alors pour tout i dans $\{1,..,p\}$ on a $c_{i1}=\sum_{k=1}^{q} b_{ik}a_{k1}$

$$C=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{q} b_{1k}a_{k1} \\ \sum_{k=1}^{q} b_{2k}a_{k1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{q} b_{pk}a_{k1} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ alors $B\times A=\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$

6. Multiplication de deux matrices quelconques

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qk} \end{pmatrix}$$

<u>Pour pouvoir faire le produit, il faut absolument que le nombre de colonne de celle de gauche soit identique aux nombres de lignes de celle de droite.</u>

$$C=A\times B=\begin{pmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1q}b_{q1}) & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Alors pour tout i dans $\{1,..,p\}$ j dans $\{1,..,q\}$ et on a $c_{ij}=\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}$

Exemple :

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A\times B=\begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $B\times A=\begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$

7. Multiplication de deux matrices carrées

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

On note C la matrice définie par C= A×B

$$C=\begin{pmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1n}b_{n1}) & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Alors pour tout i dans $\{1,..,n\}$ j dans $\{1,..,n\}$ et on a $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Exemple :

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\0 & -3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\5 & 0\end{pmatrix}$ alors $A\times B=\begin{pmatrix}\ldots\ldots & \ldots\ldots\\\ldots\ldots & \ldots\ldots\end{pmatrix}$
4. $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\0 & -3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\5 & 0\end{pmatrix}$ alors $B\times A=\begin{pmatrix}\ldots\ldots & \ldots\ldots\\\ldots\ldots & \ldots\ldots\end{pmatrix}$

III. Propriétés des opérations

1. Addition

A et B sont deux matrices carrées de taille n (entier naturel non nul)

- $A+B=B+A$ (Commutative)
- $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$ (Associative)

2. Multiplication par un réel

K est un réel, A et B sont deux matrices carrées de taille n (entier naturel non nul)

- $(k+k')A=kA+k'A$
- $K(A+B)=kA+kB$
- $(kk')A=k(k'A)$
- $(kA)B=A(kB)=k(AB)$

3. Multiplication

A, B et C sont trois matrices carrées de taille n (entier naturel non nul)

- $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)=A\times B\times C$
- $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$ (Distributivité à gauche)
- $(B+C)\times A=B\times A+C\times A$ (Distributivité à droite)
- **ATTENTION** : AB et BA ne sont pas toujours identiques
- $A^0=I_n$
- $A^{k+1}=A^k\times A=A\times A^k$ pour $k\in\mathbb{N}$

IV. Matrices de transition dans un processus d'évolution

1. Définition

Lorsqu'on s'intéresse au processus d'évolution de plusieurs données reliées entre elles par des relations linéaires, on peut déterminer le passage d'un état des données à un autre en utilisant une matrice de transition.
On note P_0 la matrice représentant l'état initial de ce processus et donc souvent des états probabiliste (probabilité initial du processus).

2. Matrice de transition dans le cas où la matrice de l'état initial est une matrice colonne

$$P_0=\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow\\ \boxed{1} & \boxed{1} & & \boxed{1}\end{array}$$

$$P_0 \overset{\times M}{\mapsto} P_1 \overset{\times M}{\mapsto} P_2 \overset{\times M}{\mapsto} P_3 \overset{\times M}{\mapsto} P_4 \overset{\times M}{\mapsto} P_4 \ldots \overset{\times M}{\mapsto} P_n$$

Et on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_n = M^n \times P_0$ ou $P_n = M^{n-k}\times P_k$

3. Matrice de transition dans le cas où la matrice de l'état initial est une matrice ligne

$$P_0=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix} \begin{array}{c} \to \boxed{1}\\ \to \boxed{1}\\ \\ \to \boxed{1}\end{array}$$

$$P_0 \overset{\times M}{\mapsto} P_1 \overset{\times M}{\mapsto} P_2 \overset{\times M}{\mapsto} P_3 \overset{\times M}{\mapsto} P_4 \overset{\times M}{\mapsto} P_4 \ldots \overset{\times M}{\mapsto} P_n$$

Et on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_n = P_0 \times M^n$ ou $P_n = P_k \times M^{n-k}$

V. Matrices particulières

1. Matrices diagonales

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque : Que se passe-t-il si on multiplie une matrice carrée par une matrice diagonale ?

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

2. Matrice unité de taille n.

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : Pour toute matrice A carré de taille n : $A\times I_n=I_n\times A=A$

Cette matrice a le même rôle que le nombre 1 dans la multiplication.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

VI. Matrices inversibles

1. Définition

On dit qu'une matrice carrée A est inversible s'il existe une matrice carrée B (de même taille que A) telle que

$$A \times B = B \times A = I_n$$

Dans ce cas on notera : $B = A^{-1}$

Exemple :

On note $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que l'inverse de A est $B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

Déterminer la matrice inverse de : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Méthodes de calcul.

Méthode 01 : Par identification (voir l'exemple précédent).

Méthode 02 : Par équivalence de matrices.

Exemple : Trouver l'inverse de $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple : Trouver l'inverse de $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Application (Equations et résolution de système)

Application 1 :

On note $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Déterminer un matrice colonne X telle que $AX=C$

Application 2 :

Résoudre le système $\begin{cases}x-y+z=1\\ y+z=-1\\ x+y+z=4\end{cases}$

4. Cas particuliers des matrices carrées 2×2

On note $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

Montrer que pour que A soir inversible il faut et il suffit que $ad-bc\neq 0$ et dans ce cas

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$